Laboratorium 2

I Szeregi Fouriera – reprezentacja ciągłego sygnału okresowego

Rozważamy sygnały – ciągłe funkcje zadane na odcinku (0, T), okresowe o okresie T, czyli: f(t+T) = f(t). W zbiorze takich sygnałów możemy określić iloczyn skalarny sygnału f(t) i g(t) w następujący sposób:

$$\langle f|g\rangle = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_{0+T}} f(t)g(t)dt$$

Pokaż, że dla tak określonego iloczyn skalarnego układ funkcji:

$$\{\sin(\omega_0 t), \sin(2\omega_0 t), \sin 3\omega_0 t, \dots, 1, \cos(\omega_0 t), \cos(2\omega_0 t), \cos(3\omega_0 t) \dots\}$$

gdzie : $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$.

stanowi ortogonalny układ wektorów (trygonometryczna baza Fouriera).

Sygnał okresowy możemy reprezentować podając współczynniki jego rozwinięcia w szereg Fouriera.

Ćwiczenia:

1. Dane jest kilka pierwszych wyrazów szeregów Fouriera dwóch sygnałów.

$$S_1(t) = \frac{4}{\pi}\left(\sin(\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega t) + \cdots\right)$$

$$S_2(t) = \frac{8}{\pi^2}\left(\sin(\omega t) - \frac{1}{3^2}\sin(3\omega t) + \frac{1}{5^2}\sin(5\omega t) - \ \dots\right)$$

a) Zakładając, że prawidłowości zauważone dla początkowych wyrazów będą się powtarzać napisz wzór na k-ty składnik każdego z szeregów.
b) Napisz funkcje Matlaba, która zależy od 4 argumentów: ilości wyrazów szeregu użytej do aproksymacji, czasów tmin i tmax (okres T=tmax-tmin) oraz odległości czasowej dt pomiedzy kolejnymi czasami pomiaru sygnału i zwraca dwie tablice opisujące kolejne czasy pomiaru i wartości aproksymacji

c) Wyplotuj uzyskane aproksymacje. Czy wiesz jakie funkcje one opisują?. Jak zależy jakość aproksymacji od ilości wyrazów użytych do aproksymacji oraz typu aproksymowanej funkcji?

2. Można wykazać, że dla funkcji $x(t)$ wyrażenia na współczynniki Fouriera mają postać:

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cos(k\omega_0 t)\, dt$$

$$b_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \sin(k\omega_0 t)\, dt$$

gdzie: $a_k - \mathit{współczynniki\ cosinusów}, k = 0, 1, 2, 3, \dots$

$b_k - \mathit{współczynniki\ sinusów}, k = 1, 2, 3, \dots$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

Wyznacz współczynniki rozwinięcia w szereg Fouriera sygnału jednopołówkowo wyprostowanej sinusoidy, czyli sygnału okresowego o okresie T, dla którego wartość sygnału pomiędzy t=0 a T/2 przebiega połówkę sinusoidy (wartości dodatnie), zaś pomiędzy T/2 a T jest równa 0.

II Całkowe przekształcenie Fouriera – reprezentacja częstotliwościowa sygnału ciągłego

Zadana jako para transformacji zawierających równoważną informację o sygnale:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j\omega t)\, dt, \qquad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \exp(j\omega t)\, d\omega$$

Funkcję x(t) nazywamy sygnałem, zaś X(jω) – widmem tego sygnału.

Widmo – na ogół funkcja zespolona, którą można zapisać w układzie biegunowym poprzez jej moduł i faze:

$$X(j\omega) = A(j\omega) \exp\,(jF(j\omega))$$

gdzie: $A(j\omega) = |X(j\omega)|$, $\qquad F(j\omega) = \tan^{-1} \frac{Im\, X(j\omega)}{Re\, X(j\omega)}$

Funkcja A(jω) – widmo amplitudowe, zaś F(jω) – widmo fazowe.

Ćwiczenia

Znajdź transformatę Fouriera oraz widmo amplitudowe i fazowe funkcji opisującej eskponencjalnie zanikający sygnał:

$x(t) = A \exp(-\alpha t)$ dla $t \geq 0$, oraz równej 0 dla $t < 0$.